131 développements pour l'oral – Lesesvre

Marche aléatoire sur [0;1]

201 262
203 265
261 266

Définition : Soit $\mathcal{I} := \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\}$

La fonction Bêta d'Euler est :

$$B : \begin{array}{rcl} \mathcal{I} \times \mathcal{I} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (p;q) & \longmapsto & \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \end{array}$$

La loi bêta de paramètres $\alpha, \beta \in \mathcal{I}$ est la loi de densité de probabilité :

$$f_{\alpha;\beta} : \begin{array}{rcl} [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha;\beta)} \end{array}$$

Proposition : Soit $(p;q) \in \mathcal{I}$

Alors : (1) $B(p;q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)^{p-1} \sin^2(\theta)^{q-1}\, 2\sin(\theta)\cos(\theta)\,d\theta$

(2) $B(p;1-p) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi p)}$

(3) $B(p;q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Lemme : Soit $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $b_n \xrightarrow[+\infty]{} b \in \mathbb{R}$, $a \in [0;1[$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a u_n + b_n$.

Alors : (u_n) converge

Théorème : Soit $p \in]0;1[$, $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v.a. de même loi $\xi_0 \sim \mathcal{B}(1;p)$, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ v.a. de même loi $U_0 \sim \mathcal{U}([0;1])$ telles que toutes les v.a. sont indépendantes. Soit $X_0 = x \in [0;1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = U_n X_n + \xi_n(1-U_n)$

Alors : la suite $X_n \xrightarrow{loi} \beta(p;1-p)$

Preuve :

oral

L'idée pour ce développement est d'utiliser la caractérisation de la convergence en loi par la convergence des moments à tout ordre. On montre :

(1) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[X_n^k] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[\beta(p;1-p)^k]$

(2) La convergence des moments à tout ordre implique la convergence en loi.

① Montrons que : $\forall k \in \mathbb{N}, m_{n,k} := \mathbb{E}[X_n^k] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[\beta(p;1-p)^k]$

oral

Comme les X_n sont à valeurs dans $[0;1]$, elles admettent des moments à tout ordre. Soit $n, k \in \mathbb{N}$.

$$m_{n+1,k} = (1-p)\mathbb{E}[X_{n+1}^k \mid \xi_n = 0] + p\,\mathbb{E}[X_{n+1}^k \mid \xi_n = 1]$$

$$= (1-p)\mathbb{E}[(U_nX_n)^k] + p\,\mathbb{E}[(U_n(X_n-1)+1)^k]$$

par indépendance des U_n et X_n

$$= (1-p)\mathbb{E}[U_n^k]\mathbb{E}[X_n^k] + p\int_0^1 \mathbb{E}[(u(X_n-1)+1)^k]\,du$$

$$= \frac{1-p}{k+1} m_{n,k} + p\,\mathbb{E}\left[\int_0^1 (u(X_n-1)+1)^k\,du\right]$$ par le théorème de Fubini

$$= \frac{1-p}{k+1} m_{n,k} + p\,\mathbb{E}\left[\left[\frac{(u(X_n-1)+1)^{k+1}}{(k+1)(X_n-1)}\right]_0^1 \mathbb{1}_{X_n<1} + \mathbb{1}_{X_n=1}\right]$$

$$= \frac{1-p}{k+1} m_{n,k} + p\,\mathbb{E}\left[\frac{X_n^{k+1}-1}{(k+1)(X_n-1)}\mathbb{1}_{X_n<1} + \mathbb{1}_{X_n=1}\right]$$

$$= \frac{1-p}{k+1} m_{n,k} + p\,\mathbb{E}\left[\frac{\sum_{i=0}^{k} X_n^i}{(k+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{k+1} m_{n,k} + \frac{p}{k+1}\sum_{i=0}^{k-1} m_{n,i}$$ par linéarité de l'espérance

Montrons par récurrence forte sur $k \in \mathbb{N}$ que $(m_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

- Initialisation : Pour $k=0$, $\mathbb{E}[X_n^0] = 1$ et alors $(m_{n,0})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $i \leq k-1$, $(m_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

$$\forall n \in \mathbb{N}, m_{n+1,k} = \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{=:a} m_{n,k} + \underbrace{\frac{p}{k+1}\sum_{i=0}^{k-1} m_{n,i}}_{=:b_n} \quad (*)$$

avec $a \in [0;1[$ et (b_n) convergente par hypothèse de récurrence.

Par le lemme, $m_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} m_k$.

En passant à la limite $(*)$ on a :

$$m_k = \frac{1}{k+1} m_k + \frac{p}{k+1}\sum_{i=0}^{k-1} m_i \quad \text{ou encore :}$$

$$m_k = \frac{p}{k}\sum_{i=0}^{k-1} m_i.$$

On peut montrer que :

Montrons par récurrence forte sur $k \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \boxed{m_k = \frac{p}{k}\prod_{i=1}^{k-1}\left(1+\frac{p}{i}\right) = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(i+p)}$$

- Initialisation : Pour $k=1$, $m_1 = p = \frac{1}{1!}\prod_{i=0}^{0}(i+p)$
- Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $i \leq k$, $m_i = \frac{p}{i}\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\frac{p}{j}\right) = \frac{1}{i!}\prod_{j=0}^{i-1}(j+p)$.

$$m_{k+1} = \frac{p}{k+1}\left[1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{p}{k}\prod_{j=1}^{i-1}\left(1+\frac{p}{j}\right)\right]$$

$$= \frac{p}{k+1}\left[(1+p) + \frac{p}{2}(1+p) + \dots + \frac{p}{k-1}(1+p)\times\dots\times\left(1-\frac{p}{k-2}\right) + \frac{p}{k}(1+p)\times\dots\times\left(1+\frac{p}{k-1}\right)\right]$$

$$= \frac{p}{k+1}(1+p)\left[1+\frac{p}{2} + \dots + \frac{p}{k-1}\left(1+\frac{p}{2}\right)\times\dots\times\left(1-\frac{p}{k-2}\right) + \frac{p}{k}\left(1+\frac{p}{2}\right)\times\dots\times\left(1+\frac{p}{k-1}\right)\right]$$

$$\vdots$$

$$= \frac{p}{k+1}\prod_{i=0}^{k}\left(1+\frac{p}{i}\right)$$

oral

Par ailleurs, soit $k \in \mathbb{N}$ et :

$$m_k' = \mathbb{E}[\beta(p;1-p)^k]$$

$$= \frac{1}{B(p;1-p)}\int_0^1 t^k t^{p-1}(1-t)^{-p}\,dt$$

$$= \frac{B(p+k;1-p)}{B(p;1-p)}$$

$$= \frac{\Gamma(p+k)\cancel{\Gamma(1-p)}}{\Gamma(k+1)} \times \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(p)\cancel{\Gamma(1-p)}}$$

$$= \frac{1}{k!} \times \prod_{i=0}^{k-1}(i+p)$$

Ainsi, $m_{n,k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}[\beta(p;1-p)^k]$

oral

② Montrons que la convergence des moments de (X_n) vers ceux d'une loi μ implique la convergence en loi de X_n vers μ.

On a vu que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$m_{n,k} = \mathbb{E}[X_n^k] \longrightarrow m_k' = \int_0^1 t^k \underbrace{\frac{t^{p-1}(1-t)^{-p}}{B(p;1-p)}}_{=: f_{p,1-p}(t)} dt$$

Ainsi, pour toute fonction polynomiale $g : [0;1] \to \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}[g(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 g(t) f_{p,1-p}(t)\,dt$$ par linéarité de l'espérance

Soit $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$.
Comme $[0;1]$ est compact, par le théorème de Weierstrass, $\exists g_\varepsilon : [0;1] \to \mathbb{R}$ polynomiale telle que $\|\varphi - g_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_{n} \left|\mathbb{E}[\varphi(X_n)] - \int_0^1 \varphi(t) f_{p,1-p}(t)\,dt\right| \le \varepsilon + \limsup \left|\mathbb{E}[g_\varepsilon(X_n)] - \int_0^1 \varphi(t) f_{p,1-p}(t)\,dt\right|$$

↑ par inégalité triangulaire $\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Alors : $\mathbb{E}[\varphi(X_n)] \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi(t) f_{p,1-p}(t)\,dt$

Proposition : $\forall (p,q) \in I$, $B(p;q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

Preuve :

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t}\,dt \int_0^{+\infty} u^{q-1} e^{-u}\,du \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} t^{p-1} u^{q-1} e^{-(t+u)}\,dt\,du \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^1 |-x|\, x^{p-1} y^{p-1} x^{q-1} (1-y)^{q-1} e^{-x}\,dy\,dx \\
&= \int_0^{+\infty}\int_0^1 x^{p+q-1} e^{-x} y^{p-1}(1-y)^{q-1}\,dy\,dx \\
&= \int_0^{+\infty} x^{p+q-1} e^{-x}\,dx \int_0^1 y^{p-1}(1-y)^{q-1}\,dy \\
&= \Gamma(p+q) \times B(p;q)
\end{aligned}$$

changement de variable

$\Phi :]0;+\infty[\times]0;1[\to]0;+\infty[\times]0;+\infty[$
$(x\,;y) \mapsto (xy\,;x(1-y))$

$\mathrm{Jac}_\Phi(x;y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1-y & -x \end{pmatrix}$

$|\mathrm{Jac}_\Phi(x;y)| = |-x|$

d'inverse :

$\Phi^{-1} :]0;+\infty[\times]0;+\infty[\to]0;+\infty[\times]0;1[$
$(t\,;u) \mapsto \left(t+u\,;\dfrac{t}{t+u}\right)$

Lemme : Soit $(b_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $b_n \xrightarrow[+\infty]{} b \in \mathbb{R}$, $a \in [0;1[$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a u_n + b_n$.
Alors : (u_n) converge

Preuve :
Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de (b_n), $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \ge N$,
$b - \varepsilon \le b_n \le b + \varepsilon$ et alors $\underbrace{a u_n + b - \varepsilon}_{=: v_{n+1}} \le u_{n+1} \le \underbrace{a u_n + b + \varepsilon}_{=: w_{n+1}}$

Les suites (v_n) et (w_n) sont arithmetico-géométriques et convergent vers $\dfrac{b-\varepsilon}{1-a}$ et $\dfrac{b+\varepsilon}{1-a}$ respectivement.

Ainsi, $u_n \xrightarrow[+\infty]{} \dfrac{b}{1-a}$.

Théorème : (de Weierstrass) Toute fonction continue sur un intervalle compact $[a;b]$ est limite uniforme sur $[a;b]$ d'une suite de polynômes trigonométriques.

Preuve :
Ops. $a = -1$, $b = 1$. Soit $F \in \mathcal{C}([-1;1])$ et $f = F \circ \cos$.
Ainsi, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et f paire. Alors $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(f) = c_{-n}(f)$.

$$\begin{aligned}
\sigma_N(f) &= c_0(f) e_0 + \sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right) c_n(f) e_n + \sum_{n=-N}^{-1}\left(1 - \frac{|n|}{N}\right) c_{-n}(f) e_{-n} \\
&= c_0(f) + 2\sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right) c_n(f) \cos(nt)
\end{aligned}$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme T_n (de Tchebycheff de première espèce) tel que :

$$T_n[\cos(nt)] = \cos(nt) \quad , \quad \deg(T_n) = n$$

En effet, par les formules de De Moivre et de Newton,

$$\cos(nt) + i\sin(nt) = [\cos(t) + i\sin(t)]^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cos^{n-j}(t) \times i^j \sin^j(t)$$

d'où en prenant la partie réelle :

$$\cos(nt) = \sum_{0 \le k \le \frac{n}{2}} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}(t) \times (-1)^k \left[1 - \cos^2(t)\right]^k$$

d'où : $$T_n(X) = \sum_{0 \le k \le \frac{n}{2}} \binom{n}{2k} X^{n-2k} \times (-1)^k \left[1 - X^2\right]^k$$

Ainsi, $$\sigma_N(f) = \underbrace{\left[c_0(f) + 2\sum_{n=1}^{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right) c_n(f)\, T_n\right]}_{= P_N} \circ \cos$$

Puisque $x = \cos(t)$ parcourt $[-1;1]$ quand t parcourt $\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\sup_{-1 \le x \le 1} |F(x) - P_N(x)| &= \sup_{t \in \mathbb{R}} |F(\cos(t)) - P_N(\cos(t))| \\
&= \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - \sigma_N(f)(t)| \\
&= \|f - \sigma_N(f)\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Féjer.
Ainsi, la suite des polynômes (P_N) converge uniformément vers F.

Temps :
15'06''
14'24''